

# Concursul Studențesc de Matematică "TRAIAN LALESCU"

## Faza Nationala

Universitatea "LUCIA BLAGA" din Sibiu

Ediția IX, 19-21 mai 2016

### Secțiunea D

1. Construiți  $f$  olomorfă pe  $\mathbb{C}$ ,  $f = u + i \cdot v$ , ( $i^2 = -1$ ), dacă

$$v(x, y) = \varphi(u(x, y)) + \cos x \cdot \operatorname{ch} y, \text{ unde } \varphi \in C^2(\mathbb{R}).$$

2. a) Calculați  $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4(nx)}{5 - 3 \cdot \sin x} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

3. Se consideră ecuația  $t \cdot y''(t) + (1-t) \cdot y'(t) + n \cdot y(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Determinați soluția  $y_n(t)$ , care este funcție original Laplace, împreună cu derivatele sale și care verifică  $y_n(0) = 1$ .

b) Să se arate că există numerele întregi  $a_n, b_n, c_n$ , astfel încât

$$a_n \cdot y_{n+1}(t) + (t - b_n) \cdot y_n(t) + c_n \cdot y_{n-1}(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1.$$

4. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left| x - \left[ x + \frac{1}{2} \right] \right|$ , unde  $[\cdot]$  reprezintă partea întreagă, iar

$|\cdot|$  reprezintă funcția modul.

a) Arătați că  $f$  este periodică, de perioadă  $T = 1$ .

b) Dezvoltați funcția  $f$  în serie Fourier pe  $\mathbb{R}$ .

c) Calculați  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .

**Toate subiectele sunt obligatorii**

**Timp de lucru : 4 ore**